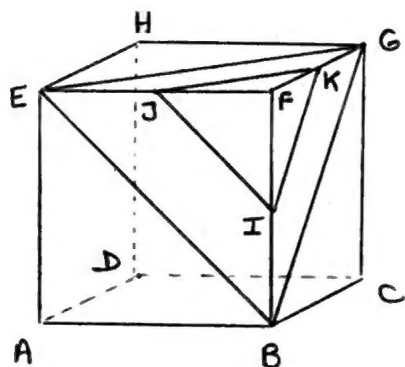


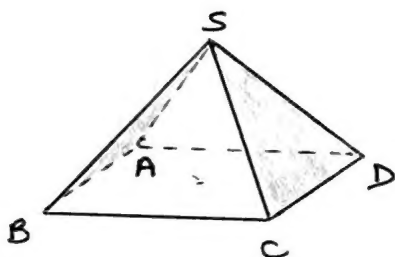
1p283 : Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous, I, J, K sont les milieux des arêtes [FB], [FE] et [FG]. Démontrer que les plans IJK et BEG sont parallèles.



(On montre que 2 dtes sécantes de l'un sont \parallel à 2 dtes sécantes de l'autre. Ici :

$(IJ) \parallel (EB)$ et $(JK) \parallel (EG)$ d'après le th. d.d.m.)

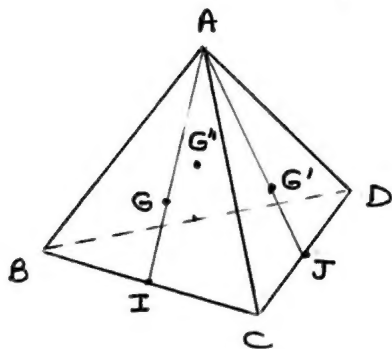
2p283 : Voici une pyramide régulière dont la base est carrée. Les triangles SAB, SBC, SCD, SDA sont équilatéraux. Montrer que l'intersection des plans SAB et SCD est une dte parallèle au plan ABCD.



(Ces 2 plans s'intersectent suivant une droite passant par S. Soit Δ la dte passant par S et parallèle à (CD) . Elle est dans le plan SCD. Comme $(CD) \parallel (AB)$, Δ sera dans le plan SAB. C'est donc la dte cherchée !)

25p287 : Soient ABCD un tétraèdre, G, G' et G'' les cdg des faces ABC, ACD et ADB, I et J les milieux des arêtes [BC] et [CD].

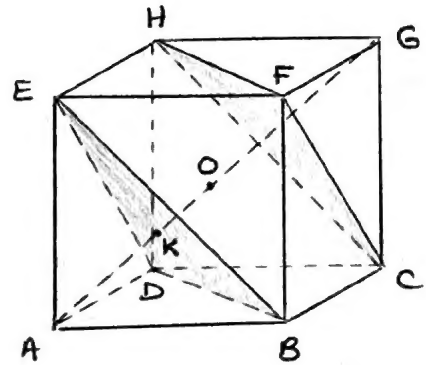
- 1) Mq les dtes (IJ) et (GG') sont parallèles,
- 2) Prouver que les pts G, G', G'' ne sont pas alignés,
- 3) Mq les plans $(GG'G'')$ et BCD sont parallèles.



- (Sol. 1) Réc. Thalès dans le plan AIJ
 2) Par l'abnde. D'après 1) $(GG') \parallel (IJ)$ et $(GG'') \parallel (IK)$ où K milieu de [BD]. Si G, G', G'' alignés, alors $(IK) \parallel (IJ) \Rightarrow K \in (IJ)$. C'est absurde car $(IJ) \parallel (BD)$ et $K \in (BD)$ ne peut pas être sur (IJ).
 3) car $(GG') \parallel (IJ)$ et $(GG'') \parallel (IK)$.)

Obj. : - Réinvestir les acquis concernant le // et \perp de plans et de droites dans l'étude d'un solide bien connu.
 - Préciser la vision du cube dans l'espace.

ex : Quelques sections planes du cube : La fig. ci-contre représente un cube dont les arêtes mesurent 6 cm.



- 1) a) Nature du triangle BDE ? Calculer son aire. $18\sqrt{3}$
- b) Soit K le cdg de BDE. Montrer que K est aussi le cdg de ACE.
(EK) coupe [DB] en son milieu I, qui est aussi le milieu de [AC]. (EI) est donc médiane de EDB et de ACE et K est situ. au 1/3 de la base I, donc K = cdg de ACE.
- c) Nature du triangle CFH ? Quelle est son aire ?
- d) Mq le cdg L de CFH est le cdg de CGE.

2) Dessiner le quadrilatère ACEG en vraie grandeur. Quelle est sa nature ? Placer les points K et L, puis justifier l'alignement des pts A, K, O, L, G.
Obj. : Transformer un pb spatial en un pb plan. Mettre en œuvre la technique de résolution consistant à remplacer un pb en un pb plus simple, etc.

$\left. \begin{array}{l} K \text{ cdg de ACE} \Rightarrow A, K, O \text{ alignés et } AK = \frac{2}{3} AO \\ L \text{ cdg de CGE} \Rightarrow G, L, O \text{ " et } GL = \frac{2}{3} GO \\ O \text{ milieu de } [AG] \end{array} \right\} \Rightarrow A, K, O, L, G \text{ alignés et } AK = KL = LG = \frac{AG}{3}$

Montrer que $AK = KL = LG$

- 3) a) Comparer les directions des droites (DB) et (FH). DBFH est un rectangle ...
- b) Mq les plans BDE et CFH sont parallèles. car $FH \parallel DB$ et $FC \parallel ED$
- 4) a) Déterminer le plan médiateur de [ED] c'est le plan ABGH
- b) " " " [BD] " " " ACEG
- c) Mq (AK) est perpendiculaire au plan BDE
(AK) \subset plan ABGH $\xRightarrow{a)} (AK) \perp (ED)$
 (AK) \subset plan ACEG $\xRightarrow{b)} (AK) \perp (BD)$
 donc $(AK) \perp (BDE)$
- 5) D'après 4), [AK] est la hauteur du tétraèdre ABDE issue de A.

- a) Calculer le volume du tétraèdre en prenant le triangle ABD pour base. 36 cm^3
- b) En déduire AK. Vérifier que $AK = \frac{1}{3} AG$
 $\frac{S_{BDE}}{18\sqrt{3}} \times \frac{AK}{3} = 36 \Rightarrow AK = 2\sqrt{3}$
 or on a $AG = 6\sqrt{3}$, $\frac{AK}{AG} = \frac{1}{3}$
- c) Longueur GL ? Retrouver $AK = KL = LG$
idem

Probl. : déduire de cette figure que la somme des angles d'un triangle vaut un plat.

⑦ Th. de la droite des milieux

Voici une démonstration de ce Th. ddm en 4^{ème}, qui n'utilise donc ni le théorème de Thalès, ni la relation de Chasles pour les vecteurs. On la trouve dans les manuels de 6^{ème}, mais elle est incomplète.

Th. : La dte joignant les milieux des 2 côtés d'un triangle est // au 3^e côté (...)

preuve : on trace le symétrique K de I par rapport à J

$AKCI$ est un parall., d'où $(KC) \parallel (BI)$

et $KC = AI = BI$. De là on déduit que $IKCB$ est un parallélogramme.

Le raisonnement est incomplet car

$$\left. \begin{array}{l} (KC) \parallel (BI) \\ KC = BI \end{array} \right\} \Rightarrow KCB I \text{ parall.}$$

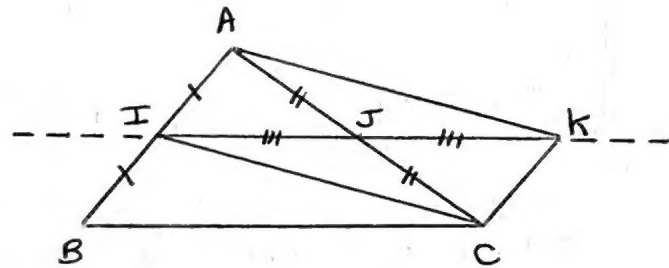
est une implication fautive. Pour qu'elle devienne vraie, il faut rajouter l'hypothèse : $KCB I$ n'est pas croisé, ie B et C appartiennent au même demi-plan de frontière (IK) .

Montrons-le : A et B n'appartiennent pas à (IJ) , sinon J étant le milieu de $[AC]$, les points A, B, I, J, C seraient alignés et ABC serait aplati.

Notons \mathcal{P}_A (resp \mathcal{P}_B) le demi-plan de frontière (IK) contenant A (resp. B).

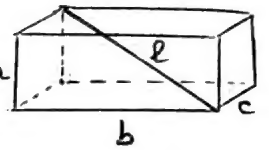
Le milieu J de $[AC]$ appartient à (IK) donc A et C n'appartiennent pas au même demi-plan de frontière (IK) , donc $C \in \mathcal{P}_B$ CQFD.

Prolongement : on déduit aussi $IJ = \frac{BC}{2}$, ...



4) Application :

Calculer la longueur de la diagonale du parallépipède rect. a



5) Soit Δ une dte passant par A et perpendiculaire à (EA) . On veut

montrer que Δ est incluse dans le plan ABD :

Le plan P contenant (EA) et Δ coupe le plan ABD suivant une dte Δ' .

Montrer que $\Delta = \Delta'$. $\Delta' \subset \Delta \cap \text{plan ABD} \Rightarrow \Delta' \perp (EA)$ - Δ et Δ' sont perp. à (EA) , dans P, et passent par A, donc $\Delta' = \Delta$.

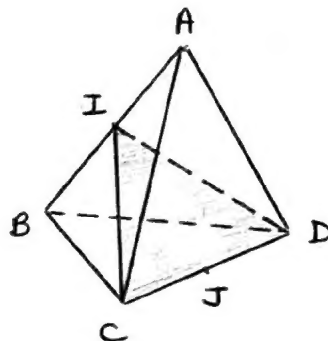
Cel : Une dte est perp. à (EA) si elle est dans le plan (ABD) . Le plan ABD et la dte (EA) sont dits orthogonaux.

- Obj. : - Introduire le plan médiateur d'un segment .
 - Couvrir cette partie du programme de 2nd .
 - Réinvestir les notions acquises au sujet de l'orthogonalité d'une droite et d'un plan .

ex : Plan médiateur d'un segment

ABCD tétraèdre régulier

I, J milieux de [AB], [CD].



- 1) $M_q(AB)$ est orthogonale au plan CDI (utiliser les dtes (ID) et (IC))
- 2) Trouver 4 pts équidistants de A et B
- 3) Soit M un pt du plan CDI. Que dire des dtes (MI) et (AB)? En déduire que $MA = MB$.
- 4) Réc., si M vérifie $MA = MB$, prouver que M est dans le plan CDI.

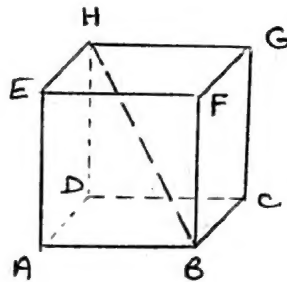
\hookrightarrow AHB isocèle $\Rightarrow (AB) \perp (MI) \Rightarrow M \in \text{plan orth. à } (AB) \text{ passant par I, c'est CDI.}$

Cel : L'ens. des pts équidistants de A et B est le plan orthogonal à (AB) passant par le milieu de [AB]. C'est le plan médiateur de [AB].

- Obj. : - Exercice d'application

ex : ABCDEFGH est un cube .

$M_q(AF)$ et (BH) sont orthogonales.



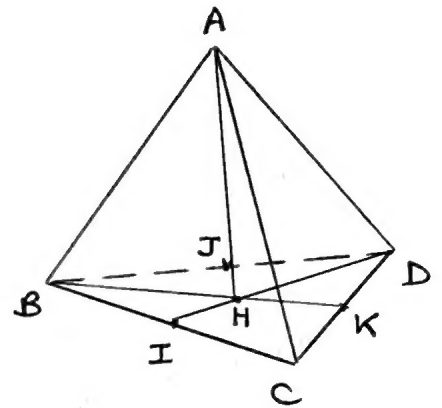
Sol. : 1^{ère} solution : B et H sont à égale distance de A et F, donc appartiennent au plan médiateur de [AF]. Donc $(AF) \perp (BH)$. CQFD

2^{ème} solution : $(AF) \perp (EB)$ et $(AF) \perp (EH)$ (car (AF) est incluse dans le plan ABFE perpendiculaire à (EH)).
 (AF) sera perp. au plan BEH, donc orthogonale à (BH). CQFD

Obj. - Application du cours concernant le // et \perp de dtes et plans dans l'espace.

ex : Hauteur d'un tétraèdre régulier

1) ABCD désigne un tétraèdre régulier dont les arêtes mesurent 8 cm, H le cdg du triangle équilatéral BCD, I, J, K les milieux de [BC], [BD], [CD].



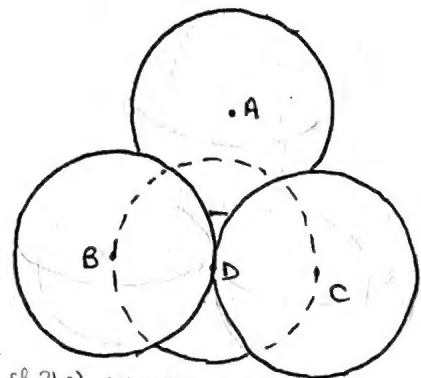
- En utilisant le plan AID, montrer que $(BC) \perp (AH)$ \rightarrow AID est le plan médiateur de [BC] (car A, I, D équi-distants de B et C) donc est perp. à [BC] en son milieu.
- " " ABK, " $(CD) \perp (AH)$
- En déduire que (AH) est orthogonale au plan BCD.

- Dessiner le triangle ABK en vraie grandeur. Est-il équilatéral?
 - Quelle est la hauteur issue de A du triangle ABK?
 - Calculer la longueur BH, puis $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 8\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 6,53$ cm
 $\frac{2}{3} BK \Rightarrow BK = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, donc $BH = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

3) Quel est le volume de ce tétraèdre ? $\frac{1}{3} \cdot \frac{8 \times 4\sqrt{3}}{2} \cdot 8\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{128}{3}\sqrt{2} \approx 60,34 \text{ cm}^3$

4) Application :

Une sculpture est composée de 4 sphères de rayon 4 cm disposé suivant la figure : Les sphères sont tangentes 2 à 2. On note A, B, C, D leurs centres.



- Nature du tétraèdre ABCD?
- Quelle est la hauteur du tétraèdre ABCD? cf 2)c) $AH \approx 6,53$ cm
- " " de la sculpture ? $8 + 6,53 \approx 14,53$ cm